

I NUMERI NATURALI

► Completa inserendo il numero corretto.

Il precedente di 1000 è .

Il successivo di 77 è .

Il successivo di è 1010.

Il precedente di è 1.

Il simbolo	Significa
$<$	minore
$>$	maggiore
$\leq$	minore o uguale
$\geq$	maggiore o uguale
$=$	uguale
$\neq$	diverso

► Completa inserendo i simboli $<$, $>$.

13 18; 0 5;

101 110; 99 0.

1 Che cosa sono i numeri naturali

► Esercizi a p. 24

I numeri naturali sono:

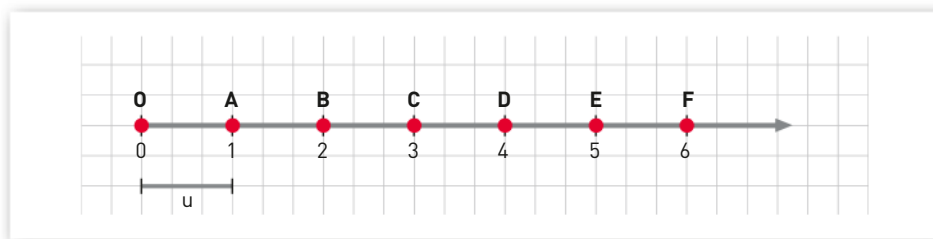
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

L'insieme di questi numeri viene indicato con la lettera $\mathbb{N}$.

I numeri naturali possono essere rappresentati su una **semiretta orientata**, cioè una semiretta sulla quale, a partire dell'origine O , fissiamo un verso di percorrenza, da sinistra verso destra, che indichiamo con una freccia. Fissiamo poi un'unità di misura u , e a partire dall'origine la riportiamo più volte sulla semiretta. A partire dall'origine a cui facciamo corrispondere lo 0, ci muoviamo verso destra passando di volta in volta al numero seguente.

Ogni numero naturale ha un successivo, il numero subito a destra sulla semiretta, e ogni numero naturale escluso lo 0 ha un precedente, il numero subito a sinistra sulla semiretta.

Per esempio 4 ha come precedente 3 e come successivo 5.



Man mano che procediamo verso destra lungo la semiretta i numeri diventano sempre più grandi: ogni numero è maggiore di tutti quelli che lo precedono sulla semiretta.

Perciò dati due numeri naturali, diversi tra loro, è sempre possibile stabilire se il primo è maggiore del secondo o viceversa. Per indicare questa relazione si utilizzano i simboli maggiore ($>$) o minore ($<$). Per esempio $0 < 3$ e $5 > 2$.

I punti della semiretta sono molti di più di quelli che corrispondono ai numeri naturali. Per esempio, fra B e C vi sono infiniti punti che non rappresentano numeri naturali.

Per indicare questo fatto si dice che $\mathbb{N}$ è un insieme **discreto**.

2 Le quattro operazioni

► Esercizi a p. 25

■ Gli operatori, gli operandi, il risultato

Con i numeri naturali si eseguono le **operazioni** di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. I due numeri con i quali si opera, cioè gli **operandi**, assumono nomi particolari, così come i risultati delle operazioni.

Nell'**addizione** il primo e il secondo operando sono gli **addendi**, il risultato è la **somma**.

Nella **sottrazione** il primo operando è il **minuendo**, il secondo operando è il **sottraendo**, il risultato è la **differenza**.

Nella **moltiplicazione** il primo e il secondo operando sono i **fattori**, il risultato è il **prodotto**.

Nella **divisione** il primo operando è il **dividendo**, il secondo operando è il **divisore**, il risultato è il **quoziente**.

addendi	minuendo	differenza	fattori	dividendo	quoziente
$3 + 4 = 7,$	$13 - 2 = 11,$		$5 \cdot 9 = 45,$	$48 : 6 = 8.$	
somma	sottraendo		prodotto	divisore	

■ L'addizione e la moltiplicazione

Fra le quattro operazioni solo l'addizione e la moltiplicazione danno sempre come risultato un numero naturale. Per questo si dice che l'addizione e la moltiplicazione sono **operazioni interne in $\mathbb{N}$** , oppure che $\mathbb{N}$ è **chiuso** rispetto a tali operazioni.

■ La sottrazione e la divisione

La sottrazione e la divisione sono definite rispettivamente in base all'addizione e alla moltiplicazione e agiscono in modo contrario rispetto a queste; per tale motivo sono anche chiamate **operazioni inverse**.

La **differenza** fra due numeri è quel numero che, addizionato al sottraendo, dà come somma il minuendo.

Per esempio: $5 - 3 = 2$, perché $2 + 3 = 5$.

Non sempre esiste in $\mathbb{N}$ il risultato della sottrazione: il risultato di una sottrazione è un numero naturale se e solo se il minuendo è maggiore o uguale al sottraendo, cioè la sottrazione **non** è un'operazione interna in $\mathbb{N}$.

Per esempio non esiste in $\mathbb{N}$ il risultato di $4 - 9$, perché non esiste un numero naturale n tale che $n + 9 = 4$.

Il **quoziente** fra due numeri è quel numero che, moltiplicato per il divisore, dà come prodotto il dividendo. Quindi, perché la divisione abbia senso *il divisore deve sempre essere diverso da 0*.



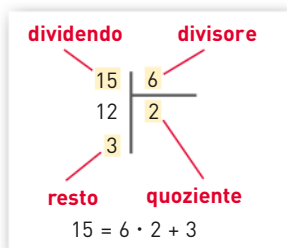
Listen to it

In an **addition**, the numbers involved are called *addends* and *sum*; in a **subtraction**, *minuend*, *subtrahend*, and *difference*; in a **multiplication**, *factors* and *product*; in a **division**, *dividend*, *divisor*, and *quotient*.

► Scrivi il nome degli operandi e del risultato di ciascuna operazione.
 $7 + 6 = 13$; $7 - 6 = 1$,
 $10 \cdot 5 = 50$; $10 : 5 = 2$.

► Completa inserendo il segno di operazione.

- 10 2 = 12
- 10 2 = 20
- 10 2 = 8
- 10 2 = 5



► Calcola il risultato sostituendo alle lettere il valore indicato.

$$2m + 3n$$

- per $m = 4$, $n = 7$
- per $m = 5$, $n = 3$

ESEMPIO

1. $18 : 3 = 6$, perché $6 \cdot 3 = 18$.
2. $18 : 0$ è un'operazione impossibile, perché non esiste nessun numero che, moltiplicato per 0, dia 18.

Anche con il divisore diverso da 0, non sempre esiste per la divisione il risultato in $\mathbb{N}$, cioè la divisione non è un'operazione interna in $\mathbb{N}$.

Per esempio, il risultato di $15 : 6$ non esiste in $\mathbb{N}$, perché non esiste un numero naturale che, moltiplicato per 6, dia 15.

Nei numeri naturali è sempre possibile eseguire la **divisione non esatta** (con resto). In questo caso fra dividendo, divisore, quoziente e resto vale la relazione:

$$\text{dividendo} = \text{divisore} \cdot \text{quoziente} + \text{resto}.$$

Solo se il resto è 0, ritorniamo al caso della divisione esatta.

■ Dai numeri alle lettere

In matematica le lettere offrono la possibilità di parlare non di un numero particolare, ma di un numero generico.

Il doppio di 4 è $2 \cdot 4$, il doppio di 100 è $2 \cdot 100$.

Se indichiamo con n un generico numero naturale, il suo doppio è $2 \cdot n$.

L'espressione $2 \cdot n$ ha un valore diverso a seconda del valore attribuito a n :

$$\text{se } n = 4, \quad 2 \cdot n \quad \text{diventa} \quad 2 \cdot 4 = 8;$$

$$\text{se } n = 100, \quad 2 \cdot n \quad \text{diventa} \quad 2 \cdot 100 = 200.$$

Quando vogliamo indicare un numero generico, usiamo quindi una lettera dell'alfabeto. A tale lettera viene dato il nome di **variabile numerica** (o, più brevemente, **variabile**); nell'esempio precedente n è una variabile.

■ Il numero 0

Addizione e sottrazione

Lo 0 sommato a qualsiasi numero dà come risultato il numero stesso. Ciò è vero indifferentemente quando 0 è il primo addendo o il secondo. Per questo motivo 0 è detto **elemento neutro dell'addizione**.

Non è invece possibile in $\mathbb{N}$ la sottrazione con il minuendo uguale a 0.

Se utilizziamo la variabile n , possiamo scrivere:

$$n + 0 = 0 + n = n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dove il simbolo $\forall$ significa «per ogni» e $\in$ significa «che appartiene», per cui la scrittura precedente si legge «per ogni n che appartiene all'insieme $\mathbb{N}$ ».

ESEMPIO

1. $8 + 0 = 0 + 8 = 8$.
2. $0 - 6$ non ha risultato in quanto in $\mathbb{N}$ non esiste un numero che, sommato a 6, dia 0.

La somma di due numeri naturali è 0 soltanto se entrambi i numeri sono 0. Invece, quando la sottrazione dà come risultato 0, significa che il minuendo e il sottraendo sono uguali.

Per esempio: $7 - 7 = 0$ perché $0 + 7 = 7$.

Moltiplicazione e divisione

Nella moltiplicazione basta che lo 0 compaia una sola volta tra i fattori per annullare il prodotto. Lo 0 è quindi un numero che, moltiplicato per qualsiasi numero, dà come risultato se stesso. Per questo lo 0 viene detto **elemento assorbente della moltiplicazione**.

Per esempio: $7 \cdot 0 = 0 \cdot 7 = 0$; $5 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 200 = 0$.

In generale, $n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nella moltiplicazione vale la **legge di annullamento del prodotto**: affinché un prodotto sia 0 è *necessario e sufficiente* che sia 0 almeno uno dei suoi fattori.

È **necessario** significa che se il prodotto è 0, almeno uno dei fattori deve essere 0.

È **sufficiente** significa che se uno dei fattori è 0, anche il prodotto è uguale a 0.

Nella divisione, quando il dividendo è 0, il quoziente è 0.

Per esempio: $0 : 4 = 0$ perché $0 \cdot 4 = 0$.

Non è possibile la divisione con il divisore uguale a 0.

ESEMPIO $6 : 0$ non ha significato. Infatti non è possibile trovare un numero che moltiplicato per 0 dia come risultato 6.

In casi come questo si dice che l'operazione è *impossibile*.

Anche la divisione $0 : 0$ non viene definita. Infatti ogni numero, moltiplicato per 0, dà come risultato 0: la divisione non potrebbe quindi avere un unico risultato. In casi come questo si dice che l'operazione è *indeterminata*.

Il numero 1

Moltiplicando qualsiasi numero per 1 si ottiene come risultato il numero stesso, indifferentemente quando 1 è il primo fattore o il secondo. Per questo 1 è detto **elemento neutro della moltiplicazione**.

Per esempio: $5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = 5$.

In generale, $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nella divisione, quando il divisore è 1, il quoziente coincide con il dividendo. Se la divisione ha quoziente 1, il dividendo e il divisore sono uguali.

ESEMPIO

$16 : 1 = 16$ perché $16 \cdot 1 = 16$.

$8 : 8 = 1$ perché $1 \cdot 8 = 8$.

► Completa le seguenti uguaglianze quando è possibile.

• $5 \cdot \square = 0$

• $6 + \square = 6$

• $\square : 7 = 0$

• $9 : 0 = \square$

• $10 - \square = 10$

• $0 - \square = 3$

► Completa le seguenti uguaglianze quando è possibile.

• $7 \cdot \square = 7$

• $12 : \square = 12$

• $1 : \square = 6$

• $1 \cdot \square = 9$

• $1 - \square = 1$

• $\square - 1 = 1$



Listen to it

In the **power** a^n , a is called **base** and n is called **exponent**.

► Calcola le seguenti potenze.
 2^7 ; 2^5 ; 3^4 ; 5^2 ; 5^3 ; 6^2 ; 2^6 .

3 Le potenze

► Esercizi a p. 26

Ci sono moltiplicazioni particolari nelle quali tutti i fattori sono uguali.

Per esempio: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Per evitare scritture così lunghe è stata introdotta una nuova operazione, la **potenza**: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ si scrive 2^7 (si legge «2 alla settima»).

Il numero 2 è la **base** e il numero 7 è l'**esponente** della potenza. La base indica quale fattore viene moltiplicato per se stesso, l'esponente indica il numero di fattori uguali.

Dunque:

se l'esponente è maggiore di 1, la potenza è il prodotto di tanti fattori quanti vengono indicati dall'esponente, tutti uguali alla base.

Usando le lettere: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$.

È ragionevole pensare che l'esponente sia maggiore o uguale a 2, per avere almeno una moltiplicazione, ossia due fattori. Tuttavia vogliamo dare un significato anche a **potenze con esponente 1 o esponente 0**.

Per definizione:

- **elevando a 0 un numero naturale diverso da 0 si ottiene 1:**

$$a^0 = 1 \quad \text{se} \quad a \neq 0;$$

- **elevando a 1 un numero naturale si ottiene il numero stesso: $a^1 = a$.**

Non viene invece definita la potenza con base ed esponente uguale a 0:

0^0 non ha significato.

ESEMPIO

1. Potenze con esponente 0:

$$2^0 = 1; \quad 2008^0 = 1; \quad 1^0 = 1; \quad 0^0 \text{ non ha significato.}$$

2. Potenze con esponente 1:

$$2^1 = 2; \quad 2008^1 = 2008; \quad 1^1 = 1; \quad 0^1 = 0.$$

4 Le espressioni con i numeri naturali

► Esercizi a p. 27

Se vogliamo eseguire una sequenza di operazioni con i numeri naturali risolviamo un'espressione.

Per esempio: $3^4 + 2 \cdot 5^2 - 3 + 20 : 2^2$.

Le operazioni vanno eseguite con un **ordine** ben preciso: prima vengono calcolate le potenze, poi le moltiplicazioni e le divisioni, nell'ordine in cui sono scritte, infine le addizioni e le sottrazioni, sempre nell'ordine in cui sono scritte.

Ciò significa che alcune operazioni hanno la precedenza rispetto ad altre. Moltiplicazioni e divisioni hanno pari precedenza, così come addizioni e sottrazioni.

ESEMPIO

$$10 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16.$$

La moltiplicazione ha priorità sull'addizione e va quindi svolta per prima.

$$10 + 2 \cdot 3 = 12 \cdot 3 = 36 \text{ è sbagliato!}$$

Semplificare un'espressione significa sostituirla con una più semplice che abbia lo stesso valore.

ESEMPIO Semplifichiamo l'espressione:

$$3^4 + 2 \cdot 5^2 - 3 + 20 : 2^2 =$$

Calcoliamo le potenze:

$$81 + 2 \cdot 25 - 3 + 20 : 4 =$$

Eseguiamo la moltiplicazione e la divisione:

$$81 + 50 - 3 + 5 =$$

Eseguiamo nell'ordine in cui le incontriamo le addizioni e la sottrazione:

$$133.$$

► Semplifica le seguenti espressioni.

- $12 : 3 + 7 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 2^3$
- $3^2 + 125 : 5 - 18 : 6 + 4^2 : 2 - 1$

Le espressioni con le parentesi

A che cosa servono le parentesi in un'espressione? Ad alterare la priorità delle operazioni, cioè a modificare l'ordine con cui devono essere svolte.

Se abbiamo

$$20 : 2^2 =$$

eseguimo prima la potenza:

$$20 : 4 = 5.$$

Se abbiamo

$$(20 : 2)^2 =$$

eseguimo prima la divisione:

$$10^2 = 100.$$

Occorre eseguire prima i calcoli presenti all'interno delle parentesi *tonde*, poi quelli all'interno delle *quadre* e infine quelli all'interno delle *graffe*.

ESEMPIO

$$\{2^5 - [15^2 - (20 : 2)^2 \cdot 2]\} \cdot 5 =$$

$$\{32 - [225 - 10^2 \cdot 2]\} \cdot 5 =$$

$$\{32 - 25\} \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35.$$

► Semplifica la seguente espressione.

$$\{[(21 : 3)^2 - 5 \cdot 2^3] : 3 + 2 \cdot 13 - 1\} : 2^2$$



■ Le espressioni e le lettere

Con le variabili possiamo scrivere espressioni letterali, per esempio:

$$2 \cdot a - b + 3 \cdot a^2.$$

Il simbolo di moltiplicazione fra variabile e numero, o fra variabili, può essere sottinteso.

Per esempio, l'espressione precedente può essere scritta:

$$2a - b + 3a^2.$$

Quando una variabile compare più volte nella stessa espressione, essa rappresenta sempre lo stesso numero.

Possiamo calcolare il valore di un'espressione per particolari valori attribuiti alle lettere.

Per esempio, prendendo $a = 5$ e $b = 10$, sostituendo i valori alle lettere, otteniamo per l'espressione precedente:

$$2 \cdot 5 - 10 + 3 \cdot 5^2 = 75.$$

Invece, se $a = 2$ e $b = 3$, l'espressione vale:

$$2 \cdot 2 - 3 + 3 \cdot 2^2 = 4 - 3 + 3 \cdot 4 = 1 + 12 = 13.$$

► Scrivi in simboli l'espressione: «Dati due numeri a e b , al doppio del successivo di a aggiungi il prodotto tra il quadrato del precedente di b e 8». Calcola il valore dell'espressione per $a = 7$ e $b = 11$. Confronta la tua risoluzione con quella proposta nel video.



Video

► Dati i numeri a e b , scrivi in simboli le seguenti espressioni, calcolando poi il loro valore per i valori assegnati ad a e b .

- a. La differenza fra il cubo di a e il cubo del doppio di b ; $a = 3$, $b = 1$.
- b. La somma del triplo prodotto di a e b e del doppio della loro differenza; $a = 5$, $b = 4$.
- c. Il prodotto fra il quadrato della somma di a e b e la somma dei loro quadrati; $a = 1$, $b = 2$.



Animazione

5 Le proprietà delle operazioni

► Esercizi a p. 36

Le seguenti proprietà sono dette **proprietà formali** delle operazioni. Esse valgono indipendentemente dai particolari numeri ai quali scegliamo di applicarle.

■ La proprietà commutativa

Proprietà commutativa dell'addizione

In un'addizione, se si cambia l'ordine degli addendi, la somma non cambia.

$$a + b = b + a$$

Per esempio: $5 + 4 = 4 + 5$.

Proprietà commutativa della moltiplicazione

In una moltiplicazione, se si cambia l'ordine dei fattori, il prodotto non cambia.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Per esempio: $4 \cdot 2 = 2 \cdot 4$.

La proprietà commutativa **non** vale né per la sottrazione né per la divisione. Per esempio,

$$15 - 3 = 12,$$

mentre $3 - 15$ non è nemmeno un numero naturale.

■ La proprietà associativa

Proprietà associativa dell'addizione

La somma di tre numeri non cambia se si associano diversamente gli addendi, lasciando invariato il loro ordine.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Per esempio: $(3 + 6) + 4 = 3 + (6 + 4)$.

La proprietà associativa fa sì che, in una sequenza di addizioni, possiamo sostituire a due addendi consecutivi la loro somma: il risultato non cambia.

Per esempio: $5 + 7 + 3 + 2 = 5 + 10 + 2$.

Leggendo l'uguaglianza da destra a sinistra, possiamo anche dire che la somma di due o più numeri naturali non cambia se sostituiamo a un suo addendo due numeri naturali che abbiano per somma tale addendo.

Proprietà associativa della moltiplicazione

Il prodotto di tre numeri non cambia se si associano diversamente i fattori, lasciando invariato il loro ordine.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Per esempio: $(6 \cdot 4) \cdot 5 = 6 \cdot (4 \cdot 5)$.

La proprietà associativa fa sì che, in una sequenza di moltiplicazioni, possiamo sostituire a due fattori consecutivi il loro prodotto: il risultato non cambia.

Per esempio: $3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot 7 \cdot 10$.

Leggendo l'uguaglianza da destra a sinistra, possiamo anche dire che il prodotto di due o più numeri naturali non cambia se sostituiamo a un suo fattore due numeri naturali che abbiano per prodotto tale fattore.

In una sequenza di addizioni (o moltiplicazioni), applicando le proprietà commutativa e associativa più volte, è sempre possibile spostare in qualunque posizione uno o più addendi (o fattori).

► Verifica con un esempio che la proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione non è valida.

► Verifica con un esempio che la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione è valida.

ESEMPIO

$$(5 + 3) + 7 = (7 + 3) + 5.$$

Infatti, per la proprietà associativa dell'addizione:

$$(5 + 3) + 7 = 5 + (3 + 7) =$$

Per la proprietà commutativa:

$$5 + (7 + 3) = (7 + 3) + 5.$$

La proprietà associativa **non** vale né per la sottrazione né per la divisione.

Per esempio:

$$(10 - 3) - 1 \neq 10 - (3 - 1);$$

$$(24 : 4) : 2 \neq 24 : (4 : 2).$$

■ La proprietà distributiva**Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione**

Quando si deve moltiplicare un numero per una somma, si può moltiplicare quel numero per ciascun addendo e poi sommare i prodotti ottenuti, e il risultato non cambia.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Per esempio: $5 \cdot (4 + 2) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2$.

Abbiamo formulato la proprietà in modo che il fattore da distribuire sia quello di sinistra. In tal caso si parla di proprietà distributiva **a sinistra**. Poiché la moltiplicazione è commutativa, la proprietà distributiva vale anche **a destra**.

Per esempio: $(3 + 4) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5$.

Leggendo le uguaglianze dei due esempi precedenti da destra verso sinistra, si può ricavare la regola del **raccoglimento a fattore comune**: quando in una somma tutti gli addendi presentano un fattore in comune, esso può essere raccolto moltiplicandolo per la somma degli altri termini.

In simboli:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c);$$

$$b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a.$$

Per esempio: $9 \cdot 8 + 9 \cdot 2 = 9 \cdot (8 + 2)$.

La proprietà distributiva della moltiplicazione e il raccoglimento a fattore comune valgono anche rispetto alla sottrazione.

In simboli:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \quad \text{con } b \geq c.$$

Proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione

Quando si deve dividere una somma per un numero, si può dividere ciascun addendo per quel numero e poi sommare i quozienti ottenuti, e il risultato non cambia.

Per esempio: $(20 + 4) : 2 = 20 : 2 + 4 : 2$.

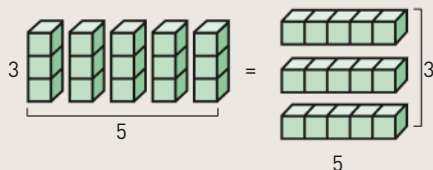
La proprietà vale solo a destra (la divisione non è commutativa).

La proprietà può essere espressa in lettere:

$$(a + b) : c = a : c + b : c, \quad \text{con } c \neq 0 \text{ e quando le divisioni sono possibili.}$$

► Lo schema della figura interpreta graficamente la proprietà commutativa della moltiplicazione. Inventi altri schemi grafici che interpretino le proprietà commutativa e associativa dell'addizione, la proprietà associativa della moltiplicazione, la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Confrontali con quelli che proponiamo nel video.



 Video

► Verifica con un esempio che la proprietà distributiva della divisione è vera anche rispetto alla sottrazione.

La proprietà invariantiva

Proprietà invariantiva della sottrazione

In una sottrazione, se si aggiunge o si toglie uno stesso numero sia al minuendo sia al sottraendo, la differenza non cambia.

Per esempio: $15 - 8 = (15 + 2) - (8 + 2)$.

In lettere:

$$a - b = (a + c) - (b + c), \quad \text{con } a \geq b;$$

$$a - b = (a - c) - (b - c), \quad \text{con } a \geq b \geq c.$$

Proprietà invariantiva della divisione

In una divisione, se si moltiplica o si divide per uno stesso numero, *diverso da 0*, sia il dividendo sia il divisore, il quoziente non cambia.

Se dividiamo il dividendo e il divisore per uno stesso numero, questo deve essere un divisore di entrambi.

ESEMPIO

$$60 : 15 = (60 \cdot 2) : (15 \cdot 2); \quad 60 : 15 = (60 : 3) : (15 : 3).$$

In lettere:

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n), \quad \text{con } b \neq 0, n \neq 0 \text{ e quando le divisioni sono possibili;}$$

$$a : b = (a : n) : (b : n), \quad \text{con } b \neq 0, n \neq 0 \text{ e quando le divisioni sono possibili.}$$

► Verifica con degli esempi che la proprietà invariantiva non vale né per l'addizione né per la moltiplicazione.

► Completa le seguenti uguaglianze e scrivi la proprietà applicata.

a. $(14 + 8) + \square = \square + (8 + 9)$

d. $(60 + \square) : 4 = \square : 4 + 8 : \square$

b. $\square \cdot (\square + 2) = 8 \cdot 5 + 8 \cdot \square$

e. $(15 + \square) \cdot 4 = \square \cdot (15 + 3)$

c. $46 - \square = (46 + \square) - (18 + 2)$

f. $\square : 45 = (270 : 9) : (45 : \square)$

 Animazione

6 Le proprietà delle potenze

► Esercizi a p. 38

■ Il prodotto di potenze di uguale base

Consideriamo la moltiplicazione $4^2 \cdot 4^3$.

Per la definizione di potenza,

$$4^2 \cdot 4^3 = \underbrace{4 \cdot 4}_{2 \text{ volte}} \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ volte}} = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{5 \text{ volte}} = 4^5,$$

ossia: $4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3}$.

Poiché 0^0 non ha significato, in tutte le proprietà delle potenze che esaminiamo, l'esponente e la base di una stessa potenza non possono essere contemporaneamente nulli.

Prima proprietà delle potenze

Il prodotto di potenze di uguale base è una potenza con la stessa base avente come esponente la somma degli esponenti.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

La definizione data per le potenze con esponente 1 o 0 è tale da verificare la prima proprietà.

Infatti:

$$6^4 \cdot 6^0 = 6^4 \cdot 1 = 6^4; \quad 6^4 \cdot 6^0 = 6^{4+0} = 6^4.$$

■ Il quoziente di potenze di uguale base

Consideriamo la divisione $4^7 : 4^3$.

Poiché la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, stiamo cercando quel numero che, moltiplicato per 4^3 , dia come prodotto 4^7 .

$$\begin{aligned} \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{7 \text{ volte}} &= \dots\dots\dots \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ volte}} \\ \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{7 \text{ volte}} &= \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{(7-3) \text{ volte}} \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ volte}} \end{aligned}$$

Il numero cercato è 4^4 ; quindi possiamo scrivere: $4^7 : 4^3 = 4^{7-3}$.

Seconda proprietà delle potenze

Il quoziente di potenze di uguale base (con l'esponente della seconda minore o uguale all'esponente della prima e con la base diversa da 0) è una potenza con la stessa base che ha come esponente la differenza degli esponenti.

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ con } m \geq n, a \neq 0$$

Se gli esponenti sono uguali, si ha, per esempio: $4^7 : 4^7 = 4^{7-7} = 4^0$. Poiché un numero diviso per se stesso è uguale a 1, abbiamo $4^7 : 4^7 = 1$; confrontando le due uguaglianze è giusto porre: $a^0 = 1$.

In generale:

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0 = 1.$$

■ La potenza di una potenza

Consideriamo 4^2 come base di un'altra potenza con esponente 3: $(4^2)^3$.

Per definizione di potenza: $(4^2)^3 = 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2$.

Per la prima proprietà delle potenze: $4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = 4^{2+2+2} = 4^{2 \cdot 3}$.

Quindi: $(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3}$.

Terza proprietà delle potenze

La potenza di una potenza è una potenza che ha la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

■ Il prodotto di potenze di uguale esponente

Scriviamo in altro modo un prodotto fra potenze con lo stesso esponente, per esempio $4^2 \cdot 6^2$, utilizzando proprietà note.

Per la definizione di potenza: $4^2 \cdot 6^2 = 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6$.

Applichiamo le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione:

$$4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 = (4 \cdot 6) \cdot (4 \cdot 6).$$

Per la definizione di potenza: $(4 \cdot 6) \cdot (4 \cdot 6) = (4 \cdot 6)^2$.

Quindi: $4^2 \cdot 6^2 = (4 \cdot 6)^2$.

Quarta proprietà delle potenze

Il prodotto di potenze di uguale esponente è una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

■ Il quoziente di potenze di uguale esponente

Consideriamo un quoziente fra potenze con lo stesso esponente: $12^2 : 4^2$.

Poiché la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, stiamo cercando quel numero che, moltiplicato per 4^2 , dia come prodotto 12^2 .

Mostriamo che quel numero è $(12 : 4)^2$, cioè che:

$$(12 : 4)^2 \cdot 4^2 = 12^2.$$

Per la quarta proprietà delle potenze:

$$(12 : 4)^2 \cdot 4^2 = [(12 : 4) \cdot 4]^2 = 12^2.$$

Quindi: $12^2 : 4^2 = (12 : 4)^2$.

► Calcola il risultato delle seguenti espressioni, indicando le proprietà delle potenze utilizzate.
 $2^3 \cdot 2^2$; $9^{13} : 9^{11}$; $(2^3)^2$;
 $2^4 \cdot 5^4$; $8^5 : 8^3$.

► Semplifica la seguente espressione:

$$[(3^3 \cdot 2^7 \cdot 3^4)^3 \cdot 6^{17}] : 3^4.$$

Confronta la tua risoluzione con quella proposta nel video.



Video

► Verifica che:

- $2^5 - 2^3 \neq 2^{5-3}$;
- $4^2 + 6^2 \neq (4 + 6)^2$;
- $12^2 - 4^2 \neq (12 - 4)^2$.



Listen to it

If a natural number a can be expressed as the number b times another number, then a is a **multiple** of b .

► Scrivi i primi cinque multipli dei seguenti numeri:

6; 11; 15; 16.

► Scrivi tutti i divisori dei seguenti numeri:
16; 25; 34; 66.

Quinta proprietà delle potenze

Il quoziente di potenze di uguale esponente è una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$a^n : b^n = (a : b)^n, \text{ con } b \neq 0$$

Osservazione. Le cinque proprietà delle potenze si basano sul fatto che la potenza è una moltiplicazione ripetuta, quindi riguardano solo la moltiplicazione e la sua inversa, la divisione. Per l'addizione e la sottrazione di potenze non si può ricavare alcuna proprietà.

ESEMPIO

$$4^2 + 4^3 \neq 4^{2+3}.$$

Infatti $4^2 + 4^3 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 + 64 = 80,$

mentre $4^{2+3} = 4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024.$

7

I multipli e i divisori di un numero

► Esercizi a p. 41

DEFINIZIONE

Un numero naturale a è **multiplo** di un numero naturale b se esiste un numero c che moltiplicato per b dà a .

$$a = c \cdot b$$

Attraverso la moltiplicazione possiamo trovare per ogni numero diverso da 0 infiniti multipli: basta moltiplicare il numero per 0, 1, 2, 3, 4, ... (il numero 0 ha invece come unico multiplo se stesso).

Per esempio i multipli di 8 sono: 0, 8, 16, 24, 32, 40, ...

Per indicarli sinteticamente possiamo scrivere:

$$8 \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

I multipli di 2 sono i **numeri pari** e si indicano con:

$$2 \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

DEFINIZIONE

Un numero naturale b , diverso da 0, è **divisore** di un altro numero naturale a se la divisione fra quest'ultimo e il numero dato è esatta, cioè se la divisione dà come resto 0.

$$a : b = c$$

ESEMPIO

1. 6 è divisore di 18, perché $18 : 6 = 3$ con resto 0;
2. 7 non è divisore di 18, perché $18 : 7 = 2$ con resto 4.

Mentre i multipli di un numero sono infiniti, i suoi **divisori** sono un numero finito.
Per esempio i divisori di 40 sono: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

Criteri di divisibilità			
Un numero è divisibile per	Quando	Esempio di numero divisibile	Esempio di numero non divisibile
2	l' ultima cifra è pari	5 679 25 4	60 018 84 1
5	l' ultima cifra è 0 o 5	279 64 0 ; 310 06 5	9 111 00 8
4	il numero formato dalle ultime due cifre a destra lo è, oppure queste cifre sono 00	295 2 64 ; 310 5 00	917 42 6
25		157 2 75 ; 98 2 00	784 04 0
3	la somma delle cifre è divisibile per 3	74 391 $(7 + 4 + 3 + 9 + 1 = 24 = 3 \cdot 8)$	32 723 $(3 + 2 + 7 + 2 + 3 = 17)$
9	la somma delle cifre è divisibile per 9	65 682 $(6 + 5 + 6 + 8 + 2 = 27 = 9 \cdot 3)$	15 747 $(1 + 5 + 7 + 4 + 7 = 24)$
11	sommando le cifre di posto dispari e poi quelle di posto pari, la differenza fra il risultato maggiore e quello minore è 11 oppure un multiplo di 11	6 150 914 $(4 + 9 + 5 + 6) - (1 + 0 + 1) = 24 - 2 = 22 = 11 \cdot 2$	122 333 $(3 + 3 + 2) - (3 + 2 + 1) = 8 - 6 = 2$

8 Il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo

► Esercizi a p. 42

La scomposizione in fattori primi

DEFINIZIONE

Si dicono **primi** i numeri naturali, diversi da 0 e da 1, che hanno come divisori soltanto 1 e se stessi.

ESEMPIO

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ..., 53, ..., 941, ..., 1987, ...

sono divisibili solo per se stessi e per 1, quindi sono numeri primi.

Quando un numero non è primo, è sempre possibile farne la **scomposizione in fattori primi**, ossia scriverlo sotto forma di un prodotto in cui *tutti* i fattori sono numeri primi.

PROBLEMA

Ma quanti sono i numeri primi?

Man mano che si procede nella successione dei numeri naturali, è sempre più raro incontrare numeri primi. Chi garantisce che, prima o poi, non troveremo il più grande numero primo? I Greci hanno dimostrato che i numeri primi sono infiniti: «Esistono sempre numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si vogliano proporre».

(Euclide, *Elementi*, Libro IX, Proposizione 20, III secolo a.C.)

La dimostrazione si basa sull'osservazione che se consideriamo i numeri primi 2 e 3, troviamo un nuovo numero primo calcolando: $2 \cdot 3 + 1 = 7 \dots$

☐ Scheda di lavoro



Listen to it

If you have two or more natural numbers (different from zero), their **greatest common divisor** (GCD) is the largest natural number that divides them all.

ESEMPIO

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

20 è scomposto in fattori primi.

$$60 = 3 \cdot 4 \cdot 5.$$

60 **non** è scomposto in fattori primi.

Infatti la scomposizione in fattori primi di 60 è:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Scriviamo anche:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

La scomposizione di un numero in fattori primi è unica. Viene anche chiamata **fattorizzazione** in numeri primi.

■ Il massimo comune divisore

Consideriamo i numeri 30 e 40.

I divisori di 30 sono: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

I divisori di 40 sono: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

30 e 40 hanno in comune i divisori 1, 2, 5, 10. 10 è il più grande e viene perciò chiamato *massimo comune divisore* e indicato con *MCD*.

Possiamo scrivere: $MCD(30; 40) = 10$.

DEFINIZIONE

Il **massimo comune divisore** (MCD) di due o più numeri naturali, *diversi da 0*, è il più grande fra i divisori comuni.

Il MCD di due o più numeri è il **prodotto dei soli fattori primi comuni, ognuno preso una sola volta con l'esponente più piccolo**.

ESEMPIO Scomponiamo 30 e 40, mettendo in colonna i fattori uguali.

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

→ Il MCD è $2 \cdot 5$, cioè 10.

Le colonne «piene» individuano i fattori comuni 2 e 5; bisogna prendere ciascuno con l'esponente più piccolo.

Se il MCD di due numeri è 1, significa che essi non hanno divisori comuni, tranne il numero 1.

In questo caso i due numeri vengono detti **primi tra loro**. Per esempio 8 e 9 sono primi tra loro.

■ Il minimo comune multiplo

Consideriamo di nuovo i numeri 30 e 40 e i loro multipli *diversi da 0*.

I multipli di 30 sono: 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, ...

I multipli di 40 sono: 40, 80, 120, 160, 200, 240, ...

Il più piccolo multiplo che i numeri 30 e 40 hanno in comune è 120; esso viene perciò chiamato *minimo comune multiplo* e indicato con *mcm*.

Possiamo scrivere: $mcm(30; 40) = 120$.

DEFINIZIONE

Il **minimo comune multiplo** (mcm) di due o più numeri naturali, *diversi da 0*, è il più piccolo fra i multipli comuni, *diversi da 0*.

Il mcm di due o più numeri è il **prodotto di tutti i fattori primi, comuni e non comuni, ognuno preso una sola volta con l'esponente più grande**.

Il mcm di due numeri primi fra loro è il loro prodotto.

Per esempio: $\text{mcm}(8; 9) = 72$.

ESEMPIO Riprendiamo le scomposizioni dell'esempio precedente:

$$\begin{aligned} 30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 40 &= 2^3 \cdot 5 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \text{Il mcm è } 2^3 \cdot 3 \cdot 5, \text{ cioè } 120.$$

L'algoritmo di Euclide

Con un **algoritmo** descriviamo l'insieme delle istruzioni da eseguire per passare dai dati di un problema ai risultati.

Euclide, negli *Elementi*, descrive un algoritmo per il calcolo del MCD fra due numeri mediante sottrazioni successive.

Il metodo si basa sul seguente teorema.

TEOREMA

Divisibilità della differenza

Se due numeri naturali a e b , con $a > b$, sono divisibili per uno stesso numero c , allora anche $a - b$ è divisibile per c .

DIMOSTRAZIONE

Se a è divisibile per c , allora $a : c = q_1 \rightarrow a = q_1 \cdot c$.

Se b è divisibile per c , allora $b : c = q_2 \rightarrow b = q_2 \cdot c$.

Consideriamo la differenza $a - b$ e raccogliamo c :

$$a - b = q_1 \cdot c - q_2 \cdot c \rightarrow a - b = (q_1 - q_2) \cdot c \rightarrow a - b \text{ è divisibile per } c.$$

ESEMPIO

130 e 40 sono divisibili per 5 $\rightarrow 130 - 40 = 90$ è divisibile per 5.

Dati a e b , con $a > b$, per il teorema precedente, quando a e b hanno un divisore comune, anche $a - b$ ha lo stesso divisore, quindi, in particolare, possiamo scrivere:

$$\text{MCD}(a; b) = \text{MCD}(a - b; b), \quad \text{con } a > b.$$

Esaminiamo ora l'algoritmo, dove utilizziamo anche il fatto che il MCD fra un numero e se stesso è ancora il numero stesso:

$$\text{MCD}(a; a) = a.$$



Listen to it

If you have two or more natural numbers (different from zero) their **least common multiple** (lcm) is the smallest natural number that is multiple of all of them.

► Calcola mcm e MCD di 96, 72, 180.



Animazione

MATEMATICA INTORNO A NOI

Cicale e numeri

primi In alcune zone degli Stati Uniti vivono due specie di cicale, *Magicicada septendecim* e *Magicicada tredecim*, con cicli vitali rispettivamente di 17 e 13 anni.



► Perché le cicale preferiscono i numeri primi?



La risposta

MCD con sottrazioni successive

Consideriamo a e b , con $a > b$;

calcoliamo $a - b$;

se $a - b = b$, allora $a - b$ è il $\text{MCD}(a; b)$ e ci fermiamo;

altrimenti sostituiamo il maggiore fra i numeri $a - b$ e b al posto di a e il minore al posto di b , e ripetiamo il procedimento precedente, calcolando la differenza.

ESEMPIO Calcoliamo $\text{MCD}(58; 18)$.

$58 - 18 = 40$; — 40 è maggiore di 18, quindi sostituiamo 40 a 58

$40 - 18 = 22$; — 22 è maggiore di 18, quindi sostituiamo 22 a 40

$22 - 18 = 4$; — 4 è minore di 18, quindi sostituiamo 4 a 18 e 18 a 22

$18 - 4 = 14$; $14 - 4 = 10$; $10 - 4 = 6$; $6 - 4 = 2$; $4 - 2 = 2$.

sono uguali: ci fermiamo

2 è il MCD.

Ecco come abbiamo applicato le proprietà precedenti:

$$\text{MCD}(58; 18) = \text{MCD}(40; 18) = \text{MCD}(22; 18) = \text{MCD}(18; 4) =$$

$$58 - 18$$

$$40 - 18$$

$$22 - 18$$

$$\text{MCD}(14; 4) = \text{MCD}(10; 4) = \text{MCD}(6; 4) = \text{MCD}(4; 2) = \text{MCD}(2; 2) = 2.$$

$$18 - 4$$

$$14 - 4$$

$$10 - 4$$

$$6 - 4$$

$$4 - 2$$

Otteniamo il $\text{MCD} = 2$ quando i due numeri sono uguali.

Nell'esempio precedente, da 58 abbiamo tolto 18 per 3 volte fino a giungere a 4:

$$\begin{array}{c} \text{3 sottrazioni} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ [(58 - 18) - 18] - 18 = 4 \end{array} \rightarrow 58 : 18 = 3 \text{ resto } 4.$$

Queste 3 sottrazioni ripetute equivalgono a dividere 58 per 18, ottenendo 4 come resto. Quindi, utilizzando il teorema della divisibilità della differenza, ma evitando sottrazioni ripetute, diciamo che se 58 e 18 sono divisibili per uno stesso numero, anche 4, resto di $58 : 18$, è divisibile per lo stesso numero.

L'esempio giustifica il seguente teorema.

TEOREMA**Divisibilità del resto**

Se due numeri naturali a e b , con $a > b$, sono divisibili per uno stesso numero c , allora anche r , resto della divisione $a : b$, è divisibile per c .

ESEMPIO

130 e 40 sono divisibili per 5.

$$130 : 40 = 3 \text{ con resto } 10$$

$\rightarrow 10$ è divisibile per 5.

Nell'algoritmo di Euclide, per diminuire il numero di operazioni da eseguire, possiamo allora procedere mediante **divisioni successive**, invece che sottrazioni, e utilizzare i resti ottenuti.

ESEMPIO Calcoliamo $\text{MCD}(58; 18)$ con divisioni ripetute.

$$58 : 18 = 3 \quad \text{con resto } 4 \quad \rightarrow \quad \text{MCD}(58; 18) = \text{MCD}(18; 4);$$

$$18 : 4 = 4 \quad \text{con resto } 2 \quad \rightarrow \quad \text{MCD}(18; 4) = \text{MCD}(4; 2);$$

$$4 : 2 = 2 \quad \text{con resto } 0 \quad \rightarrow \quad \text{MCD}(4; 2) = 2.$$

Abbiamo ottenuto di nuovo $\text{MCD}(58; 18) = 2$.

Nell'esempio ci siamo fermati quando abbiamo ottenuto resto 0, perché in questo caso il secondo numero è divisore del primo e quindi è anche il MCD. In generale:

$$\text{MCD}(a; b) = b, \text{ se } r = 0.$$

■ Una proprietà fra mcm e MCD di due numeri

Il minimo comune multiplo e il massimo comune divisore di due numeri sono legati anche dalla seguente proprietà:

$$\text{mcm}(a; b) = \frac{a \cdot b}{\text{MCD}(a; b)}.$$

Consideriamo $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ e $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Il MCD, scomposto in fattori, è $3 \cdot 7$, e il mcm è $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Esprimiamo il prodotto dei due numeri, lasciandoli scomposti in fattori:

$$84 \cdot 105 = (2^2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7).$$

Vediamo che $3 \cdot 7$, cioè il MCD, è ripetuto due volte, mentre nel mcm dobbiamo considerarlo una volta sola. Quindi:

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = \frac{(2^2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7)}{3 \cdot 7} \rightarrow \text{mcm}(84; 105) = \frac{84 \cdot 105}{\text{MCD}(84; 105)}.$$

La proprietà permette di calcolare il mcm se si è calcolato il MCD, per esempio con l'algoritmo di Euclide.

ESEMPIO Con l'algoritmo di Euclide abbiamo calcolato che $\text{MCD}(58; 18) = 2$, quindi:

$$\text{mcm}(58; 18) = \frac{58 \cdot 18}{2} = 522.$$

► Calcola il MCD fra 330 e 90, utilizzando l'algoritmo di Euclide.

 Animazione

9 I sistemi di numerazione

► Esercizi a p. 46

■ Il sistema a base dieci

Il nostro modo di scrivere i numeri si basa sull'uso di dieci simboli diversi, le **cifre**:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

I primi dieci numeri naturali sono indicati da una sola cifra, mentre per scrivere i successivi utilizziamo una combinazione di cifre.

► Scrivi i numeri la cui forma polinomiale è la seguente:

- $9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10$;
- $3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^0$.

Consideriamo il numero 222. Leggendolo da destra, il primo 2 indica le unità, il secondo 2 le decine, il terzo 2 le centinaia.

Le cifre assumono un valore diverso a seconda della *posizione* in cui si trovano. Per questo il nostro sistema è di tipo **posizionale**.

Ogni numero può essere scritto in **forma polinomiale**, come somma di prodotti costituiti da un numero di una cifra e una potenza di 10.

ESEMPIO

$$4637 = 4000 + 600 + 30 + 7 = 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Il numero 10 assume un ruolo particolare e viene detto **base**. Il nostro sistema di numerazione è chiamato **a base dieci**.

I sistemi con altre basi

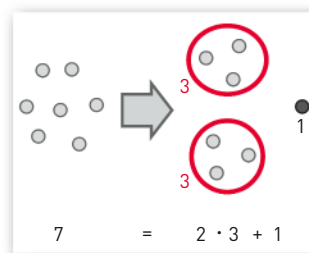
Un sistema di tipo posizionale può avere come base un numero qualsiasi. È sufficiente raggruppare le unità non secondo le potenze di dieci, ma secondo quelle della nuova base.

ESEMPIO Scriviamo 7 in base tre.

Il numero 7 si può pensare come costituito di 2 gruppi da 3 unità e di 1 da 1 unità. Perciò il numero 7 (in base dieci) scritto in base tre diventa 21 (si legge: «due-uno»).

In forma polinomiale:

$$7 = 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0.$$



Con il simbolo 21 in base tre indichiamo un numero diverso da quello che lo stesso simbolo indica in base dieci (ossia ventuno).

Per non creare confusione, conveniamo di scrivere i numeri in base diversa da dieci fra parentesi, indicando in piccolo la base.

Nell'esempio precedente scriviamo quindi:

$$7 = (21)_3.$$

Scriviamo una tabella dei primi cinque numeri diversi da 0 scritti nelle basi da 2 a 5.

Numero	Base 2	Base 3	Base 4	Base 5
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	10	3	3
4	100	11	10	4
5	101	12	11	10

Lo stesso simbolo 10 (uno-zero) indica il 2 in base due, il 3 in base tre e così via. Il simbolo 100 (uno-zero-zero) indica la potenza con esponente 2 della base e così via.

Inoltre, scelta una base, essa ci indica anche quanti simboli (cifre) sono necessari per rappresentare tutti i numeri; per esempio, in base due sono necessari solo due simboli, 0 e 1, in base tre sono necessari i simboli 0, 1 e 2 e così via.

Il sistema di numerazione in base due si chiama anche **sistema binario**.

Se la base è maggiore di 10, servono altri simboli oltre alle dieci cifre che conosciamo. Di solito si usano le lettere maiuscole.

Per esempio:

- in base dodici il numero 10 viene indicato con A e il numero 11 con B;
- in base sedici (molto usata in informatica) i numeri da 10 a 15 sono indicati con le lettere da A a F.

■ Da una base qualsiasi a base dieci e viceversa

Nella scrittura di un numero possiamo passare da una base prescelta a base dieci utilizzando la forma polinomiale.

ESEMPIO

1. $(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11$;
2. $(232)_5 = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 50 + 15 + 2 = 67$;
3. $(1A)_{12} = 1 \cdot 12^1 + 10 \cdot 12^0 = 22$.

Per passare invece da base dieci a una base qualsiasi possiamo utilizzare un procedimento di divisioni successive che hanno come divisore la base.

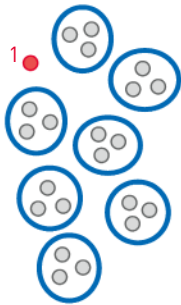
Per esempio, scriviamo 22 in base tre.

- Scrivi:
- a. $(10210)_3$ in base dieci;
 - b. 3615 in base 4.

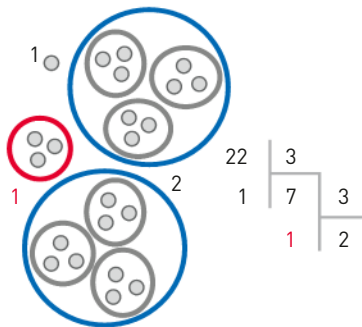
 **Animazione**

- Scrivi il numero 179 in base 5 e in base 2. Confronta la tua risoluzione con quella proposta nel video.

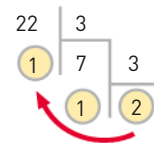
 **Video**



a. Dividendo 22 per 3 otteniamo quoziente 7 e resto 1: in 22 ci sono 7 gruppi da 3 e 1 unità.



b. Dividendo 7 per 3 otteniamo quoziente 2 e resto 1: dai 7 gruppi da 3 si ottengono 2 gruppi da 3^2 e 1 gruppo da 3 isolato.



c. Il numero in base tre si legge nella direzione della freccia: $(22)_{10} = (211)_3$.

- Scrivi in base dieci i seguenti numeri.

$(11000)_2$; $(200)_3$; $(211)_4$; $(312)_5$; $(10A)_{12}$; $(1002)_5$.

- Scrivi i seguenti numeri espressi in base dieci nella base indicata a fianco.

143 in base 2; 218 in base 5; 3612 in base 3; 1322 in base 4.

IN SINTESI

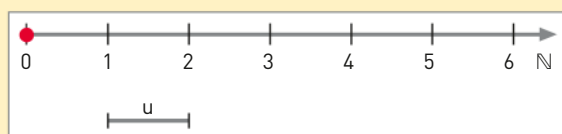
I numeri naturali

■ Che cosa sono i numeri naturali

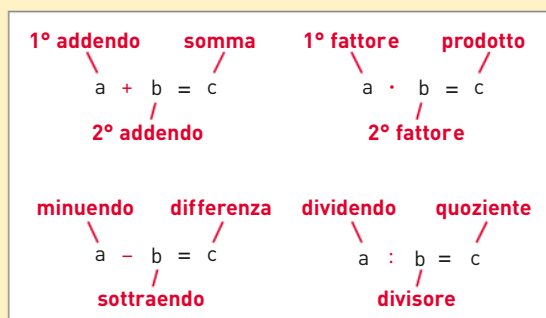
L'insieme dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, ... viene indicato con la lettera $\mathbb{N}$.

I numeri naturali possono essere rappresentati su una **semiretta orientata**.

Dati due numeri naturali, diversi tra loro, è sempre possibile stabilire se il primo è maggiore del secondo o viceversa.



■ Le quattro operazioni



Il divisore deve essere diverso da 0.

Delle quattro operazioni, solo l'addizione e la moltiplicazione sono **operazioni interne** in $\mathbb{N}$.

■ Le potenze

Una **potenza** con esponente maggiore di 1 è una moltiplicazione della base per se stessa tante volte quante sono indicate dall'esponente:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

- Qualunque numero **elevato a 1** dà come risultato se stesso: $a^1 = a$.
- Qualunque numero diverso da 0 **elevato a 0** dà come risultato 1: $a^0 = 1$.
- L'espressione 0^0 **non ha significato**.

■ Le espressioni con i numeri naturali

In un'**espressione**, le operazioni devono essere svolte in questo ordine:

1. elevamento a potenza;
2. moltiplicazione e divisione, nell'ordine in cui sono scritte;
3. addizione e sottrazione, nell'ordine in cui sono scritte.

Inoltre, le operazioni scritte tra parentesi hanno la precedenza, prima le parentesi tonde, poi le quadre, poi le graffe.

■ Le proprietà delle operazioni

Proprietà dell'addizione

Proprietà	Espressione
commutativa	$a + b = b + a$
associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$

Proprietà della moltiplicazione

Proprietà	Espressione
commutativa	$a \cdot b = b \cdot a$
associativa	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
distributiva a sinistra rispetto all'addizione	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
distributiva a destra rispetto all'addizione	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Proprietà della sottrazione

Proprietà	Espressione
invariantiva	$a - b = (a + n) - (b + n)$ con $a \geq b$ $a - b = (a - n) - (b - n)$ con $a \geq b \geq n$

Proprietà della divisione

Proprietà	Espressione
invariantiva	$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$ con $b \neq 0, n \neq 0, a$ multiplo di b $a : b = (a : n) : (b : n)$ con $b \neq 0, n \neq 0, a$ multiplo di b, a e b multipli di n
distributiva a destra rispetto all'addizione	$(a + b) : c = a : c + b : c$ con $c \neq 0, a + b, a$ e b multipli di c

■ Le proprietà delle potenze

Proprietà delle potenze

Proprietà	Espressione
1 ^a : prodotto di potenze di uguale base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2 ^a : quoziente di potenze di uguale base	$a^m : a^n = a^{m-n}$ con $m \geq n, a \neq 0$
3 ^a : potenza di una potenza	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4 ^a : prodotto di potenze di uguale esponente	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5 ^a : quoziente di potenze di uguale esponente	$a^n : b^n = (a : b)^n$ con $b \neq 0, a$ multiplo di b

Le lettere della tabella indicano numeri naturali qualsiasi. La base e l'esponente di una stessa potenza non possono essere contemporaneamente nulli.

■ I multipli e i divisori di un numero

- Un numero naturale a è **multiplo** di un numero naturale b se esiste un numero c che moltiplicato per b dà a .
- Un numero naturale b (diverso da 0) è **divisore** di un altro numero naturale a se la divisione fra b e a dà come resto 0.

■ Il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo

- Un numero naturale (maggiore di 1) è **primo** quando è divisibile soltanto per 1 e per se stesso.
- Ogni numero naturale non primo si può scomporre nel prodotto di **fattori primi**.
- Il **MCD** di due o più numeri, diversi da 0, è il più grande dei divisori comuni ed è dato dal prodotto dei soli fattori primi comuni, ognuno preso una sola volta con l'esponente più piccolo.

ESEMPIO

$$\text{MCD}(18; 48) = \text{MCD}(2 \cdot 3^2; 2^4 \cdot 3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

- Il **mcm** di due o più numeri naturali diversi da 0 è il più piccolo dei multipli comuni ed è dato dal prodotto di tutti i fattori primi, comuni e non comuni, presi ciascuno una sola volta con l'esponente più grande.

ESEMPIO

$$\text{mcm}(12; 20) = \text{mcm}(2^2 \cdot 3; 2^2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

- L'**algoritmo di Euclide** è un metodo per calcolare il MCD fra due numeri mediante sottrazioni successive che si basa sul teorema che afferma: se due numeri naturali a e b , con $a > b$, sono divisibili per uno stesso numero c , allora anche $a - b$ è divisibile per c .

■ I sistemi di numerazione

Il nostro sistema di numerazione è **posizionale a base dieci**: ogni numero viene rappresentato mediante dieci cifre (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) che assumono valore diverso a seconda della posizione che occupano.

Un sistema posizionale può avere come base un numero qualsiasi.

ESEMPIO

$$(1001)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 9;$$

$$(221)_3 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 25;$$

$$(53)_7 = 5 \cdot 7 + 3 = 38.$$

CAPITOLO 1

ESERCIZI

1 Che cosa sono i numeri naturali

► Teoria a p. 2

1 VERO O FALSO?

- a. 6 è precedente a 7. ☒ ☐
- b. 7 è il precedente di 8. ☒ ☐
- c. 8 è il successivo di 6. ☒ ☐
- d. 7 è successivo a 8. ☐ ☒
- e. 0 non ha il successivo. ☒ ☐

2 Di uno dei numeri naturali 1, 4, 0 non esiste il precedente. Quale? Hanno tutti il successivo?

3 VERO O FALSO?

- | | | | | | |
|-------------------|--|-----------------------------------|----------------------|--|-----------------------------------|
| a. $8 < 8$ | ☒ V | ☐ F | d. $1 \neq 2$ | ☒ V | ☐ F |
| b. $0 < 7$ | ☒ V | ☐ F | e. $9 = 8$ | ☒ V | ☐ F |
| c. $7 < 5$ | ☒ V | ☐ F | f. $0 \geq 0$ | ☒ V | ☐ F |

4 **YOU & MATHS** **Numbers in words** Write the following numbers in words if they are in digits, and write them in digits if they are given in words.

- a.** Four hundred and two. **d.** 2005.
b. One thousand two hundred three. **e.** 43 010.
c. Fifteen hundred twenty four. **f.** 10 002.

5 **COMPLETA** inserendo fra le seguenti coppie di numeri il simbolo di minore ($<$) o di maggiore ($>$):

4 7; 8 10; 0 12; 15 13;
15 0; 14 7; 1 2; 3 2.

6 Scrivi quanti numeri naturali sono compresi fra i numeri delle coppie precedenti.

7 **COMPLETA** le seguenti frasi.

Il successivo di 7 è .

Il precedente di 10 è .

Il successivo di è 2001.

Il precedente di è 500000.

8 Traduci le seguenti frasi usando i simboli $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, $=$, $\neq$.

- | | |
|---|----------------------------|
| a. 7 è minore di 9; | a è uguale a 21. |
| b. x è maggiore o uguale a 2; | 10 è diverso da 3. |
| c. b è maggiore di 9; | x è minore o uguale a 4. |
| d. 9 è maggiore di 7 e minore di 11; | a è diverso da b . |

9 Scrivi tutti i numeri naturali n , se esistono, che verificano le relazioni indicate.

$$n \leq 4; \quad n < 2; \quad 1 < n \leq 5; \quad 6 < n < 7; \quad 4 \leq n < 8; \quad 1 \leq n < 6.$$

10 Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri:

6; 10; 2; 114; 38; 100.

11 Scrivi in ordine decrescente i seguenti numeri:

28; 0; 129; 14; 99; 237.

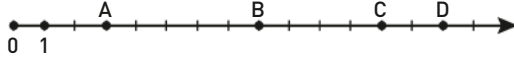
IN FORMA GRAFICA

Rappresenta sulla semiretta orientata i seguenti numeri, scegliendo un'opportuna unità di misura.

12 1; 5; 12; 16; 7; 8.

13 0; 1000; 2500; 3000; 500; 250.

14 IN FORMA GRAFICA Per ogni punto indicato scrivi il numero corrispondente.



15 Rappresenta su una semiretta orientata i numeri naturali n (se esistono) che verificano le relazioni:
 $n \leq 3$; $2 < n < 4$; $6 \leq n \leq 7$; $2 \leq n < 5$.

2 Le quattro operazioni

► Teoria a p. 3

Gli operatori, gli operandi, il risultato

16 Per ognuna delle operazioni seguenti, indica il nome di ogni operando e del risultato.
 $5 + 10 = 15$; $7 - 5 = 2$; $5 \cdot 4 = 20$; $10 : 2 = 5$.

17 COMPLETA scrivendo il numero mancante e indica quale operazione hai eseguito per ottenere quel numero:

$5 + \square = 18$; $\square \cdot 7 = 21$; $329 + \square = 742$; $32 \cdot \square = 2368$.

18 Nelle uguaglianze seguenti i simboli $\diamond$, $\star$, $\triangle$, ∇ rappresentano un'operazione. Quale?
 $9 \diamond 3 = 27$; $20 \triangle 5 = 15$; $15 \star 5 = 3$; $10 \nabla 14 = 24$.

L'addizione e la moltiplicazione

VERO O FALSO?

19 Dati tre numeri naturali qualsiasi a, b, c :

- a. $a + c = c + a$. ☐ V ☐ F
- b. $b - a = a - b$. ☐ V ☐ F
- c. $(a + b) - c = a + (b - c)$. ☐ V ☐ F
- d. $a - 0 = 0 - a$. ☐ V ☐ F

20 La divisione fra due numeri naturali:

- a. è sempre possibile. ☐ V ☐ F
- b. è possibile solo se il secondo è diverso da 0. ☐ V ☐ F
- c. è possibile solo se il primo è multiplo del secondo e il secondo è diverso da 0. ☐ V ☐ F
- d. è possibile solo se il primo è maggiore del secondo. ☐ V ☐ F

21 La somma di due numeri naturali consecutivi (cioè due numeri di cui uno è successivo dell'altro) è 27. Trova i due numeri.

22 La somma di un numero e del suo precedente è 683. Trova i due numeri.

23 L'insieme $\{0, 1, 2, 3\}$ è chiuso rispetto all'addizione? E rispetto alla moltiplicazione?

24 L'insieme $\{0, 1\}$ è chiuso rispetto all'addizione? E rispetto alla moltiplicazione?

25 L'addizione è interna nell'insieme dei numeri pari? E la moltiplicazione?

26 L'addizione è interna nell'insieme dei numeri dispari? E la moltiplicazione?

La sottrazione e la divisione

27 Perché le operazioni di sottrazione e di divisione non sono operazioni interne a $\mathbb{N}$?

28 Indica quali delle seguenti operazioni sono possibili in $\mathbb{N}$.

$3 + 5$; $7 - 3$; $4 - 18$; $5 : 5$; $12 : 9$; $3 : 6$; $4 \cdot 9$; $0 : 1$.

29 Elimina con una crocetta le operazioni non possibili in $\mathbb{N}$.

$3 - 4$; $4 - 4$; $5 - 4$; $4 : 3$; $4 : 4$; $4 : 8$; $8 : 4$; $8 : 8$.

30 **COMPLETA** Scrivi alcuni dei numeri che rendono possibili in $\mathbb{N}$ le seguenti operazioni.

$\square - 4$; $\square - 1$; $4 : \square$; $13 : \square$; $\square - 10$; $3 : \square$; $10 : \square$; $\square : 2$.

Il numero 0 e il numero 1

31 **COMPLETA** le seguenti uguaglianze, quando è possibile.

$2 : \square = 1$ $\square \cdot 0 = 0$ $3 : 0 = \square$ $3 \cdot \square = 0$
 $\square \cdot 4 = 4$ $\square + 0 = 0$ $2 - \square = 2$ $\square : 3 = 0$

32 **SPIEGA PERCHÉ** non sono possibili le seguenti divisioni.

$4 : 0$; $10 : 0$; $500 : 0$; $0 : 0$.

33 **COMPLETA** scrivendo i risultati delle seguenti operazioni, quando esistono.

$3 : 1 = \square$ $0 : 3 = \square$ $3 \cdot 0 = \square$ $3 : 3 = \square$
 $3 : 0 = \square$ $3 \cdot 1 = \square$ $0 : 5 = \square$ $0 \cdot 0 = \square$

34 **VERO O FALSO?**

- La differenza fra due numeri consecutivi è 1.
- In $\mathbb{N}$ non è possibile la sottrazione con il sottraendo uguale a 0.
- Se si considera l'insieme dei naturali escluso lo 0, la divisione è operazione interna in tale insieme.
- Dati due numeri (il primo maggiore del secondo), se si aggiunge al secondo numero la differenza fra il primo e il secondo, si ottiene il primo.

☐ V ☐ F

☐ V ☐ F

☐ V ☐ F

☐ V ☐ F

3 Le potenze

► Teoria a p. 6

35 **VERO O FALSO?**

- Nell'espressione 5^3 , 5 è l'esponente e 3 la base.
- L'espressione 0^0 è indeterminata.
- Le potenze 5^0 e 1^{15} hanno lo stesso risultato.
- La potenza 2^4 è multipla della potenza 2^5 .

☐ V ☐ F

☐ V ☐ F

☐ V ☐ F

☐ V ☐ F

36 Qual è il risultato della potenza 0^n , con $n \in \mathbb{N}$?

37 Quale numero ha come potenza solo se stesso?

38 Quale numero non ha fra le sue potenze 1?

39 Scrivi le potenze di 5 comprese fra 0 e 11.

40 Indica fra i seguenti numeri quelli che sono potenze di 3.

3; 6; 9; 0; 1; 12; 27; 30;
33; 81; 121; 99.

Calcola il valore delle seguenti potenze.

41 2^3 ; 3^4 ; 5^2 ; 7^1 ; 8^0 ; 7^2 ; 100^0 ; 1^0 ; 0^1 .

42 9^3 ; 4^2 ; 2^5 ; 0^4 ; 3^5 ; 1^8 ; 10^7 ; 2^6 ; 3^6 ; 5^3 .

43 ☐ **YOU & MATHS** If $2^4 \cdot 3^8 = n \cdot 6^4$, then $n =$

☐ A 12 ☐ B 24 ☐ C 27 ☐ D 54 ☐ E 81

(USA University of South Carolina: High School Math Contest, 2003)

44 ☐ **YOU & MATHS** Which of the following numbers is equal to the sum

$8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8$?

☐ A 8^8 ☐ B 8^9 ☐ C 64^8 ☐ D 8^{64} ☐ E 64^{64}

(USA University of South Carolina: High School Math Contest, 2002)

45 ☐ **YOU & MATHS** Which of the following numbers is a perfect square?

☐ A $4^4 5^5 6^6$

☐ B $4^4 5^6 6^5$

☐ C $4^5 5^4 6^6$

☐ D $4^6 5^4 6^5$

☐ E $4^6 5^5 6^4$

(USA, AMC 12, 2002)

Le gare American Mathematics Contest 12 (AMC 12) sono rivolte a ragazzi americani del secondo biennio superiore.

COMPLETA quando è possibile, mettendo il numero giusto.

46 $^2 = 0$; $^3 = 27$; $^0 = 2$; $^1 = 8$.

47 0^{input} $= 1$; 5^{input} $= 10$; 7^{input} $= 1$; 4^{input} $= 16$.

48 3^{input} $= 6$; 2^{input} $= 8$; 1^{input} $= 2$; 5^{input} $= 0$.

49 $0^6 = \text{input}$; $16^0 = \text{input}$; 3^{input} $= 243$; $^2 = 1$.

50 **VERO O FALSO?**

a. $1^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

☐ V ☐ F

d. $n^1 = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

☐ V ☐ F

b. $0^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

☐ V ☐ F

e. $0^0 = 0$.

☐ V ☐ F

c. $n^0 = 1$, con $n = 1, 2, 3, \dots$

☐ V ☐ F

4 Le espressioni con i numeri naturali

► Teoria a p. 6

51 Tra le espressioni: $(12 - 4) \cdot 3$, $12 - 4 \cdot 3$, $12 + 3 \cdot 4$, due hanno lo stesso risultato. Quali?

52 Considera le seguenti coppie di espressioni:

a. $(5 + 7) + 8$, $5 + 7 + 8$; b. $7 + (2 \cdot \quad)$, $7 + 2 \cdot 3$; c. $20 : (5 - 4)$, $20 : 5 - 4$.

Solo in una coppia l'eliminazione della parentesi influisce sul risultato. Quale?

Indica in quali casi lo spostamento o l'eliminazione delle parentesi non influisce sul risultato dell'espressione.

53 $(5 + 2) + 8;$ $5 + 2 + 8.$

56 $5 + (3 + 9);$ $5 + 3 + 9.$

54 $7 + (5 \cdot 3);$ $7 + 5 \cdot 3.$

57 $40 : (5 - 4);$ $40 : 5 - 4.$

55 $(3 + 2) \cdot 11;$ $3 + 2 \cdot 11.$

58 $24 + 6 : 3;$ $(24 + 6) : 3.$

59 **INVALSI 2006** Sono dati due numeri di due cifre $a2$ e $4b$ in cui a rappresenta la cifra delle decine del primo numero e b la cifra delle unità del secondo. Sapendo che $23 + 4b = a2$, quanto vale la somma di a e b ?

- A** 15 **B** 16 **C** 17 **D** 18

60 **YOU & MATHS** Working backwards

- a. Write at least 3 expressions that, calculated, give 16.
b. Now write 3 more expressions that give 16, making sure to use the structure $a \cdot (b \pm c) = 16$.

Dalle parole alle espressioni

61 **ESERCIZIO GUIDA** Scriviamo le espressioni relative alle seguenti frasi:

- a. «Sottrarre da 12 il quoziente fra 4 e 2»; b. «Dividere per 2 la differenza fra 12 e 4»

Traduciamo nell'ordine le parole in espressioni:

a. «Sottrarre da 12 ...» si traduce con: $12 - \dots$

«... il quoziente tra 4 e 2» si traduce con: $4 : 2$.

Pertanto l'espressione equivalente è: $12 - 4 : 2$.

b. «Dividere per 2...» si traduce con: $\dots : 2$.

«... la differenza tra 12 e 4» si traduce con: $12 - 4$.

Scrivendo l'espressione $12 - 4 : 2$, poiché la divisione si esegue prima della sottrazione, verrebbe diviso per 2 solamente il 4.

La frase invece dice di dividere per 2 la **differenza** ..., quindi bisogna scrivere $12 - 4$ tra **parentesi**.

L'espressione richiesta è $(12 - 4) : 2$.

62 **INVALSI 2011** Qual è l'espressione numerica che corrisponde alla frase: «Al 3 aggiungi il prodotto di 5 e 9, poi dividi per 6 e quindi sottrai 2»?

A $[3 + (4 + 9)] : (6 + 2)$

C $3 \cdot (5 + 9) : 6 - 2$

B $3 + 5 \cdot 9 : 6 - 2$

D $(3 + 5 \cdot 9) : 6 - 2$

Scrivi le espressioni relative alle seguenti frasi e calcolane il risultato.

63 Sottrarre 9 dal prodotto di 8 per 2.

67 Sottrarre 3 al risultato della divisione di 12 per la differenza tra 5 e 1.

64 Dividere 15 per la differenza tra 9 e 4 e poi sommare 2.

68 Dividere 18 per la differenza tra 9 e il prodotto di 3 per 2.

65 Moltiplicare per 3 la differenza tra 12 e 7.

69 Sottrarre a 17 la differenza tra il prodotto di 8 per 2 e 9.

66 Moltiplicare 3 per la somma di 9 e del quoziente di 14 e 2.

70 Dividere per 5 la differenza tra 15 e il prodotto di 5 per 2.

71 Moltiplicare per 7 la differenza tra 10 e 8; sottrarre al risultato 14.

72 Sommare 2 al prodotto di 3 per la differenza tra il quoziente di 16 e 4 e 3.

73 Sommare 7 al prodotto di 12 per la somma di 4 e la differenza tra 5 e il prodotto di 3 per 1.

Dalle espressioni alle parole

74 **ESERCIZIO GUIDA** Traduciamo in parole le espressioni: a. $12 + 3 \cdot 5$; b. $(12 + 3) \cdot 5$.

Sostituiamo mano a mano le parole alle espressioni, facendo attenzione alla presenza delle parentesi.

a. Dato che non ci sono parentesi, la moltiplicazione si esegue prima dell'addizione:

... $3 \cdot 5$ si traduce in: «... il prodotto di 3 per 5»;

$12 + \dots$ si traduce in: «Aggiungere a 12 ...».

La frase corrispondente alla nostra espressione è:

«Aggiungere a 12 il prodotto di 3 per 5».

b. La **parentesi** ci dice che, al momento dello svolgimento, bisogna eseguire prima l'addizione e poi la moltiplicazione:

$12 + 3$ si traduce in: «La somma tra 12 e 3»;

... $\cdot 5$ si traduce in: «Moltiplicare ... per 5».

La frase corrispondente alla nostra espressione è:

«Moltiplicare la somma tra 12 e 3 per 5».

Traduci in parole le seguenti espressioni.

75 $12 - 6 : 3$;

$15 + 7 \cdot 3$.

77 $(15 : 5 - 2) - 1$;

$[4 : (15 : 3 - 3)] + 2$.

76 $(12 + 6 : 3) : 7$;

$(15 - 10) \cdot 3 + 2$.

78 $8 \cdot (12 : 6 - 2) + 1$;

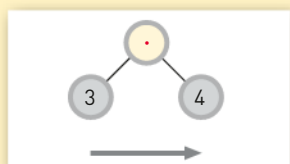
$6 - [15 : (2 + 3)]$.

Espressioni e diagrammi ad albero

79 **ESERCIZIO GUIDA** Nei seguenti esempi utilizziamo diagrammi ad albero per rappresentare delle espressioni e per comprendere l'ordine di esecuzione delle operazioni.

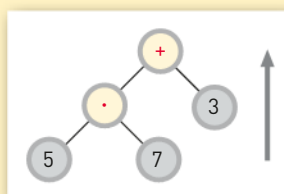
a. $3 \cdot 4$

Un'operazione si rappresenta come nella figura. L'ordine con cui sono scritti i termini va da sinistra a destra.



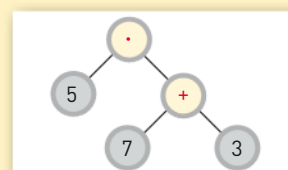
b. $5 \cdot 7 + 3$

La prima operazione da eseguire è in basso, l'ultima in alto.



c. $5 \cdot (7 + 3)$

L'introduzione della parentesi cambia l'ordine delle operazioni, «legando» diversamente i numeri dell'espressione.



Rappresenta con diagrammi ad albero le seguenti espressioni.

80 $4 + 6 \cdot 9;$ $(4 + 6) \cdot 9.$

81 $7 - 3 + 2;$ $7 - (3 + 2).$

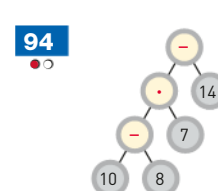
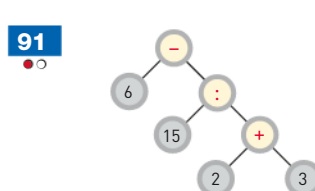
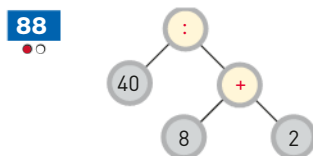
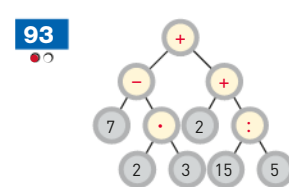
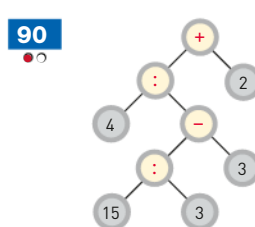
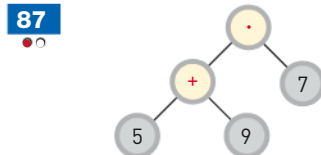
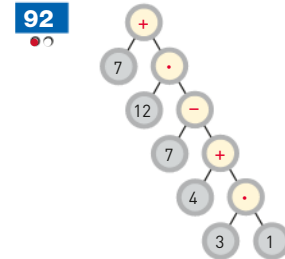
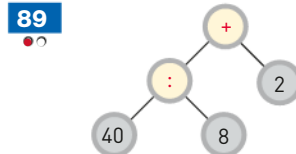
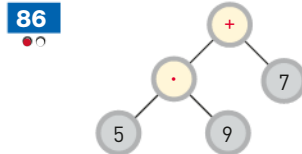
82 $5 \cdot 6 : 2 + 1;$ $5 \cdot (6 : 2) + 1.$

83 $10 - 4 \cdot 2 + 3;$ $10 - 4 \cdot (2 + 3).$

84 $15 + 20 : 4 - 2;$ $15 + 20 : (4 - 2).$

85 $4 \cdot 6 - 2 - 5;$ $4 \cdot (6 - 2) - 5.$

Scrivi le espressioni relative ai seguenti diagrammi ad albero.



Dai problemi alle espressioni

Problemi **INTORNO A NOI**

95 **ESERCIZIO GUIDA** Scriviamo l'espressione che permette di risolvere il problema: «Sandro ha 2 banconote da € 5 e 4 monete da € 2. Si ferma a pranzare e compra 2 tranci di pizza da € 2 ciascuno e una bottiglietta d'acqua da € 1. Nel pagare si accorge di avere in tasca anche altre tre monete da € 1. Quanto denaro resta a Sandro?».

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \text{spende} & & \text{trova} & \\
 & & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\
 \frac{2 \cdot 5}{2 \text{ banconote da € 5}} & + & \frac{4 \cdot 2}{4 \text{ monete da € 2}} & - & \frac{2 \cdot 2}{2 \text{ tranci da € 2}} & - & \frac{1}{\text{bottiglietta da € 1}} & + & \frac{3 \cdot 1}{3 \text{ monete da € 1}}
 \end{array}$$

Semplifichiamo l'espressione: $2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 + 3 \cdot 1 = 10 + 8 - 4 - 1 + 3 = 16.$

A Sandro restano 16 euro.